Exercice II

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_0 et C_1, et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable, l'une des lettres a, b ou c. Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_0. On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c. A la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante :

- si la lettre a est tirée, on change le jeton A de case ;
- si la lettre b est tirée, on change le jeton B de case ;
- si la lettre c est tirée, on ne change pas le placement des jetons.

On suppose que l'on définit sur le même espace probabilisé une suite de variables aléatoires $(W_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$, décrivant les positions des deux jetons A et B, en posant :
$W_0 = 0$, et pour tout entier naturel n non nul,
$W_n = 0$ si, à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ opération, A et B se trouvent tous deux dans C_0,
$W_n = 1$ si, à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ opération, A se trouve dans C_0 et B dans C_1,
$W_n = 2$ si, à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ opération, A se trouve dans C_1 et B dans C_0,
$W_n = 3$ si, à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ opération, les deux jetons se trouvent dans C_1.

1°) Calculer les probabilités $P(W_1 = i)$, pour i égal à 0, 1, 2 et 3.

2°) Déterminer la matrice R telle que, pour tout entier naturel n, on ait l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} P(W_{n+1}=0) \\ P(W_{n+1}=1) \\ P(W_{n+1}=2) \\ P(W_{n+1}=3) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} P(W_n=0) \\ P(W_n=1) \\ P(W_n=2) \\ P(W_n=3) \end{pmatrix}$$

3°) On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Pour tout entier naturel n non nul, calculer les matrices U^n et V^n.

b) Etablir, pour tout entier naturel non nul, l'égalité :

$$(U-V)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k U^{n-k} V^k$$

où, par convention, on pose $U^0 = V^0 = I$.

c) En déduire, pour tout entier naturel non nul, l'égalité :

$$(U-V)^n = \frac{1}{4}(3^n - (-1)^n)U + (-1)^n V^n$$

4°) Pour tout entier naturel n non nul, calculer la matrice R^n et donner la loi de la variable W_n (on distinguera les cas n pair et n impair).

Exercice 1

Une urne contient une boule noire et $(n-1)$ boules blanches, n désignant un entier supérieur ou égal à 2.
On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le deuxième s'effectue avec remise, le troisième s'effectue sans remise ...
D'une manière générale, les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise et les tirages d'ordre pair s'effectuent avec remise de la boule tirée.

1°) a) Quel est le nombre total N de tirages effectués lors de cette épreuve ?

b) Pour j élément de $[\![1, n-1]\!]$, combien reste-t-il de boules avant le $(2j)^{\text{ème}}$ tirage ? Combien en reste-t-il avant le $(2j+1)^{\text{ème}}$ tirage ?

On désigne par X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule noire est obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage (que ce soit la première fois ou non) et 0 sinon. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la boule noire lors de cette épreuve.

2°) a) Calculer $P(X_1 = 1)$, $P(X_2 = 1)$.

b) Pour tout entier naturel j de $[\![1, n-1]\!]$, calculer $P(X_{2j+1} = 1)$ et $P(X_{2j} = 1)$.

c) En déduire la loi suivie par toutes les variables X_k.

3°) Pour tout j élément de $[\![1, n]\!]$, on note U_j l'événement : «on obtient la boule noire pour la $1^{\text{ère}}$ fois au $(2j-1)^{\text{ème}}$ tirage ».

a) En considérant l'état de l'urne avant le $(2n-2)^{\text{ème}}$ tirage, montrer que $P(U_n) = 0$.
Montrer que : $\forall j \in [\![1, n]\!], P(U_j) = \dfrac{n-j}{n(n-1)}$.

b) Exprimer l'événement $(X = 1)$ en fonction des U_j, puis en déduire la valeur de $P(X = 1)$.

c) Montrer que $P(X = n) = \dfrac{1}{n!}$.